

Recursos educativos guía para *profesores*



Matemáticas

UNIVERSUM

Museo de las Ciencias de la UNAM

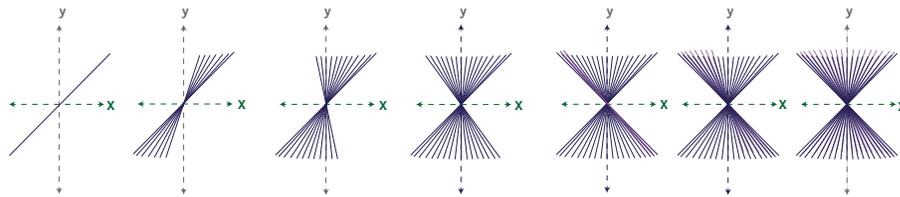
Tema:

CÓNICAS

Las primeras figuras geométricas que aprendemos y relacionamos con nuestro entorno están dibujadas en el plano: círculo, triángulo, cuadrado, rombo, pentágono, entre otras.

Existen otro tipo de figuras como los sólidos de revolución, que se construye al hacer girar una figura plana alrededor de un eje fijo.

El cono es un sólido de revolución que se obtiene al hacer girar dos triángulos rectángulos que coinciden en un vértice. Estas figuras se estudiaron desde hace siglos y aún nos siguen sorprendiendo sus particularidades.



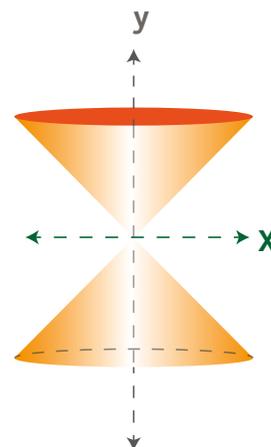
La época de oro de las matemáticas griegas abarcó del 300 al 200 antes de nuestra era. Y los mayores representantes fueron Euclides, Arquímedes y Apolonio.

Apolonio de Pérgamo fue un matemático que dedicó ocho de sus veinte libros al estudio de las cónicas e inspiró a Papús, otro matemático griego, a estudiar más a fondo a estas líneas.

El trabajo de Apolonio se perdió al pasar de los años, pero algunos libros se conservaron gracias a la traducción al árabe que hizo el matemático Thabit Ibn Qurra; y en los siglos XVI y XVII, Johanms Baptista Memkus, Abraham Echellensis y Giacomo Alfonso Borelli hicieron lo propio.

Apolonio en uno de sus libros define al cono circular recto de la siguiente manera:

Si una línea recta de longitud "y" que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble.

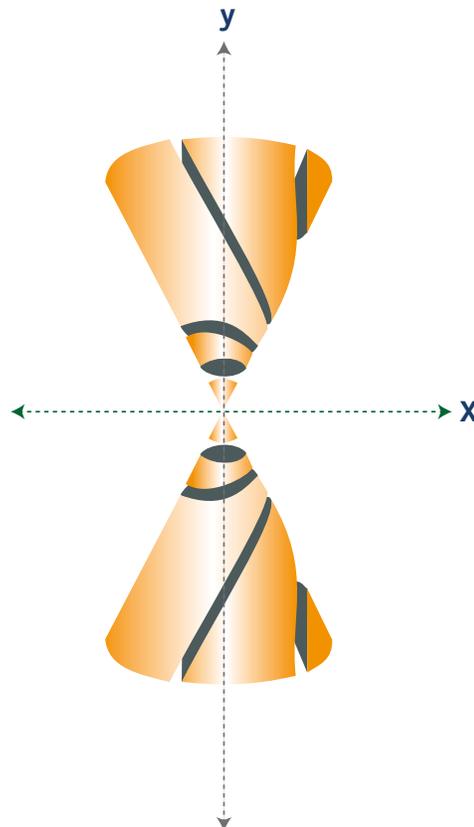


Además, propuso las siguientes definiciones: a la recta Y se le llama **generatriz** del cono, al punto fijo **vértice** y a la recta trazada desde el vértice al centro del círculo se llama **eje**.

Apolonio construyó cada una ellas y fue Arquímedes, posiblemente, quien les puso nombres a tres de las secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola.

A partir de las observaciones astronómicas de Tycho Brahe, Kepler dedujo sus famosas leyes sobre el movimiento de los planetas, la primera de las cuales dice que los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas que tienen al Sol en uno de sus focos. Para formular esta ley, Kepler se basó en los estudios de las secciones de una superficie cónica realizados por Apolonio de Pérgamo en el siglo II antes de nuestra era, hasta ahora se conservan los nombres que les dio, *Ellipsis* (deficiencia), *Hyperbola* (avanzar más allá) y *Parábola* (colocar al lado o comparar).

Las cónicas son líneas que se determinan al cortar un cono con planos de distinta inclinación. **Es importante tener en cuenta que son líneas y no superficies.**

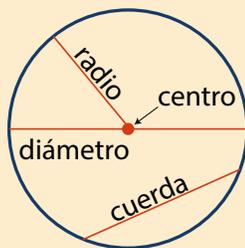


CIRCUNFERENCIA:

Es la línea que se obtiene al cortar un cono recto con un plano paralelo a la base.

Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro llamado centro. La distancia de los puntos al centro se llama R . Haciendo coincidir el origen de coordenadas con el centro de la circunferencia.

Las partes de la circunferencia



Centro. Es un punto que se elige para, a partir de él trazar la circunferencia.

Cuerda. Segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro. Una cuerda que pasa por el centro.

Radio. Es la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro.

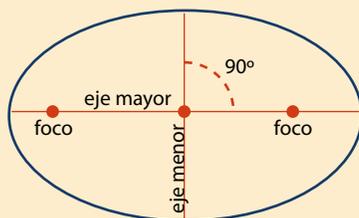
ELIPSE:

Es la línea que se obtiene al cortar un cono recto con un plano oblicuo. Dados en el plano dos puntos fijos, llamados focos, se llama elipse al lugar geométrico de los puntos del plano tal que la suma de sus distancias a los focos es constante.

En una elipse, podemos observar el siguiente efecto, si desde un foco de una elipse sale una bola de billar y se refleja en la curva, la bola irá a parar al otro foco. Esta propiedad la han utilizado los espías para escuchar conversaciones secretas en las llamadas galerías de los susurros.

La excentricidad en la elipse es el cociente entre la distancia focal y el diámetro mayor.

Las partes de la elipse:



Focos. Puntos fijos que usan para construir una elipse.

Cuerda. Segmento de recta que une dos puntos de la elipse.

Eje mayor. Es una cuerda que pasa por los dos focos.

Eje menor. Es una cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por el centro.



Distancia focal. La longitud entre los focos.

ACTIVIDADES SUGERIDAS

Métodos de construcción de la elipse

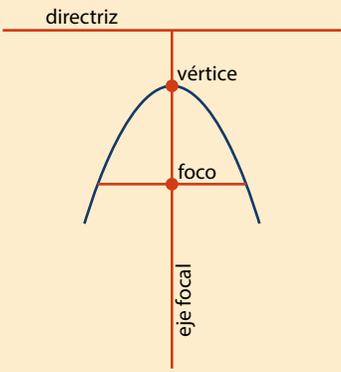
Método del jardinero: se toma un hilo de longitud igual al diámetro mayor de la elipse, o sea $2a$. Elegidos los F_1 y F_2 (focos), arbitrariamente, se fija en cada uno de ellos con una tachuela al extremo del hilo. Con una punta de un lápiz se extiende el hilo y, al deslizar el lápiz, manteniendo siempre el hilo tenso, la punta del lápiz dibuja una elipse. Cualquier punto de la curva cumple la siguiente condición: "La suma de sus distancias a los focos es igual a la longitud del hilo, que es igual a $2a$ ".

PARÁBOLA:

Es la línea que se obtiene al cortar un cono recto con un plano paralelo a la generatriz.

Dados en un plano una recta y un punto exterior, se llama parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta (directriz) y del punto (foco).

Elementos de la parábola:



Directriz. Se designa con la letra d .

Foco de la parábola. Se designa con la letra F .

Eje. Es la perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

Parámetro. Es la distancia entre el foco y la directriz.

Vértice. Es el punto donde la curva corta el eje; dicho punto se encuentra a igual distancia de la directriz y del foco. Se indica con la letra V . La distancia del vértice a la directriz es $p/2$.

El comportamiento de la parábola es curioso, porque tienen un solo foco, sin embargo, si pensamos en el segundo foco que se ha ido al infinito, entenderemos por qué los rayos de luz que parten del foco y coinciden en la parábola se reflejan paralelamente a su eje y se van al infinito, es decir se reflejan, por eso es tan útil esta propiedad para fabricar reflectores de luz o antenas parabólicas.

A la parábola se le puede reconocer con una ecuación $Y=X^2$.

HIPÉRBOLA:

Es la línea que se observa al cortar un cono recto con un plano perpendicular a la base del mismo.

Si el plano que intersecta al cono perpendicularmente a la base contiene al vértice, se obtienen dos semirrectas que se cortan, también llamadas hipérbola degenerada. Se considera que una figura es degenerada cuando sale de las generalidades a partir de una pequeña perturbación, por ejemplo las hipérbolas son curvas, pero la hipérbola degenerada son dos rectas que se cruzan.

Utilicemos el ejemplo de la mesa de billar, si lanzamos una bola de billar desde un foco contra la curva, si ésta es reflectante la bola no podrá pasar al otro lado, entonces ¿qué hace la bola? pues seguir el camino del otro foco, pero en sentido contrario.

Las partes de la hipérbola

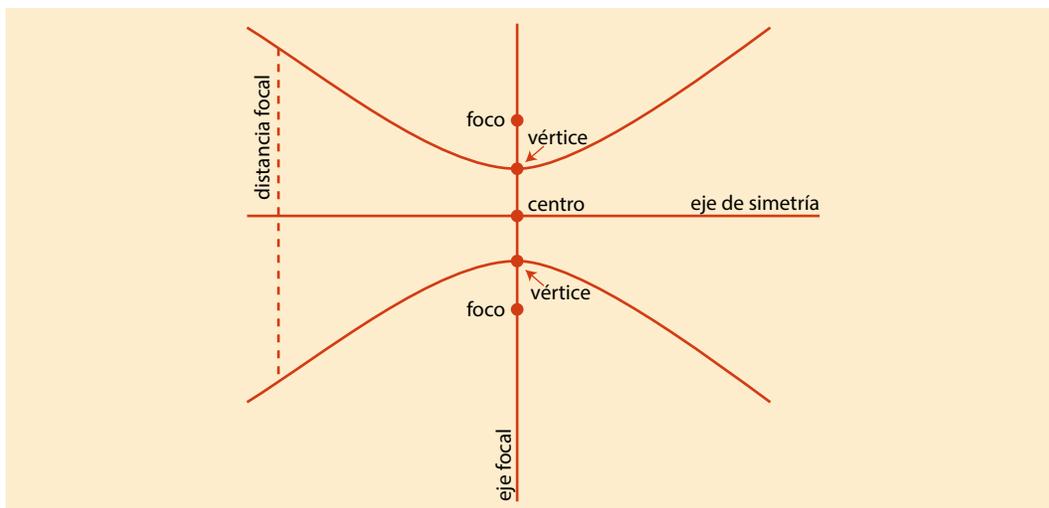
Asíntota. Rectas que pasan por el centro y son tangentes a la hipérbola en el infinito. Diagonales del rectángulo trazado por los extremos de los ejes. Cuando la hipérbola es equilátera el rectángulo se convierte en cuadrado y las asíntotas son perpendiculares entre sí y forman 45° de los ejes.

Focos. Puntos fijos con los que se construye la hipérbola.

Eje focal. Recta que contiene a los focos. Eje de simetría de la cónica.

Distancia focal. Longitud entre los focos.

Vértice. Punto en la superficie cónica que se encuentra en el eje.



PROPUESTA DIDÁCTICA:

Sugerimos que para este tema, no importando el nivel educativo (primaria, secundaria o bachillerato) se establezca una metodología de tres fases: información o preconceptos, orientación dirigida y explicación o profundización de conceptos.

FASE DE INFORMACIÓN O PRECONCEPTOS

En la fase de información se parte de los conceptos que tienen los estudiantes, una propuesta práctica es pedirles que en su cuaderno dibujen las figuras geométricas que conozcan y que les pongan nombre.

En esta fase pueden repasar las características de cada una de las figuras geométricas y se puede aclarar que éstas se dibujan en un plano, pero que existen otras que tienen volumen, y en particular pueden estudiar las características del cono y las secciones cónicas.

Esta estrategia permitirá que los alumnos puedan reflexionar y apelen a la memoria de lo ya aprendido.

FASE DE ORIENTACIÓN DIRIGIDA

En esta fase el estudiante, a través de una actividad dirigida, aprenderá cada una de las secciones cónicas, cómo se construyen y qué características tienen. Por medio del aprendizaje significativo, es decir, a partir de un taller el estudiante podrá distinguir qué tipo de curva se obtiene al cortar un cono circular recto con planos en distintos ángulos.

FASE DE EXPLICACIÓN

Consideramos que esta fase es la más importante, porque el conocimiento no sólo se queda en la teoría o en una actividad, sino que los estudiantes relacionan lo aprendido con su vida cotidiana.



RÚBRICAS DE CALIFICACIÓN PARA EL MAESTRO

TEMA: CÓNICAS

Primaria

Criterios de calificación		Comprende	Cumple	Necesita soporte adicional
		3	2	1
INVESTIGACIÓN	Artículo: "Figuras geométricas"	Distingue las características que poseen las figuras geométricas planas.	Selecciona las figuras planas pero no menciona las palabras clave (simetría, parábola) del artículo y/o dibuja las figuras.	Selecciona las figuras planas pero no menciona las palabras clave (simetría, parábola) del artículo y/o dibuja las figuras.
	Exposición: "Imaginario Matemático"	Durante el recorrido identifica y expresa cuáles son las figuras planas.	Durante el recorrido identifica cuatro figuras planas pero no menciona las palabras claves de la exposición.	No identifica figuras geométricas de más de cuatro lados en la exposición.
CIENCIA	Explicaciones Científicas	Integra el contenido científico relevante, retomando los términos y palabras clave (simetría, cuadrado, triángulo, pentágono, eneágono, etc.)	Selecciona y escribe el nombre de las figuras geométricas planas base (triángulo, cuadrado, rectángulo, etc.) y traza las simetrías pero no menciona las figuras de más de cuatro lados.	Menciona algunos términos científicos pero no explica en qué consiste cada uno.
ACTIVIDADES	Desarrollo	Logra dibujar las figuras de más de diez lados y puede trazar correctamente el eje de simetría. Incluye y relaciona palabras claves para responder a lo solicitado en la hoja de actividades.	Elabora correctamente las figuras geométricas pero no traza el eje de simetría correctamente, menciona palabras claves pero muestra errores al relacionarlas en la hoja de actividades.	Señala de manera general 1 o 2 tipos de figuras geométricas pero no escribe correctamente el nombre. No incluye palabras claves en su hoja de actividades, tiene errores al trazar el eje de simetría y al relacionar las figuras de más de cuatro lados con su entorno.



Secundaria

Criterios de calificación		Comprende	Cumple	Necesita soporte adicional
		3	2	1
INVESTIGACIÓN	Artículo: "Construcción de nuevas figuras"	Distingue las partes de la elipse, los elementos de la parábola e hipérbola, identifica correctamente figuras planas y con volumen, así como la forma de construirlas.	Identifica las partes de la elipse, parábola e hipérbola pero no con suficiente detalle. Identifica correctamente las figuras planas y con volumen pero no las nombra correctamente.	Escribe las palabras clave, nombra e identifica correctamente las figuras planas pero no las que tienen volumen.
	Exposición: "Imaginario Matemático"	Durante el recorrido identifica y expresa cuáles son las figuras planas y con volumen.	Durante el recorrido identifica 6 figuras planas y con volumen pero no menciona las palabras claves de la exposición.	Selecciona la información literal de la exposición.
CIENCIA	Explicaciones Científicas	Integra el contenido científico relevante, retomando los términos y palabras clave (parábola, elipse, hipérbola y localiza la circunferencia). Nombra correctamente las figuras planas y con volumen.	Identifica las figuras geométricas planas y con volumen, retomando características de la parábola, la elipse y la hipérbola, además las nombra correctamente.	Menciona algunos términos científicos pero no responde las preguntas que se realizan en la hoja de actividades.
ACTIVIDADES	Desarrollo	Selecciona correctamente el nombre y figura que corresponden.	Escribe el nombre de la figura.	Logra realizar correctamente el modelo, sin embargo no identifica correctamente las figuras y los conceptos clave (parábola, elipse e hipérbola).
		Logra construir el modelo que se le pide e identifica las figuras que se forman. Incluye y relaciona las palabras clave (hipérbola, parábola y elipse), así como los nombres correctos de las figuras planas y con volumen.	Incluye palabras claves pero muestra errores al construir el modelo que se le pide. Incluye tres términos y tres nombres de las figuras que se forman.	



Preparatoria

Criterios de calificación		Comprende	Cumple	Necesita soporte adicional
		3	2	1
INVESTIGACIÓN	Artículo: "Cónicas"	Identifica y explica correctamente las partes de la elipse, la parábola e hipérbola, así como las características de cada una.	Identifica las partes de la elipse, parábola e hipérbola pero no con suficiente detalle. Identifica correctamente las figuras planas y con volumen pero no las nombra correctamente.	Escribe las palabras clave, nombra e identifica correctamente las figuras planas pero no las que tienen volumen.
	Exposición: "Imaginario Matemático"	Durante el recorrido identifica y expresa cuáles son las secciones cónicas.	Durante el recorrido identifica las cuatro secciones cónicas, pero no menciona las palabras claves de la exposición.	Selecciona la información literal de la exposición.
CIENCIA	Explicaciones Científicas	Integra el contenido científico relevante, retomando los términos y palabras clave de la elipse, circunferencia, parábola e hipérbola así como sus características.	Escribe palabras científicas clave (partes de la hipérbola, parábola, elipse y circunferencia) pero no las localiza correctamente.	Menciona algunos términos científicos pero no responde correctamente lo que se pide.
ACTIVIDADES	Desarrollo	Selecciona correctamente el nombre y figura que corresponden. Logra construir el modelo que se le pide e identifica las figuras que se forman. Describe ampliamente lo que ocurre con el vértice del cono, así como los ángulos que se forman.	Escribe el nombre de la figura y construye el modelo pero muestra errores al identificar las partes de la hipérbola, la elipse, la parábola y la circunferencia.	Logra realizar correctamente el modelo, sin embargo no identifica correctamente las figuras y los conceptos clave (parábola, elipse, hipérbola y circunferencia).





Universum, Circuito Cultural de Ciudad Universitaria, Coyoacán 04510, Ciudad de México • Informes: 56 22 72 60 • atencionv@dgdc.unam.mx
www.universum.unam.mx • www.dgdc.unam.mx [@UniversumMuseo](https://twitter.com/UniversumMuseo) [/UniversumMuseo](https://www.facebook.com/UniversumMuseo)

Conceptualización y realización:
Alejandro León / Mónica Genis / Adriana Rayón / Patricia Estrada

